ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation National, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2011
Institut National des Postes et Télécommunications
INPT

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées
Session 2011

ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **MP**

Épreuve de Mathématiques I

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est **interdit**.

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Étude de la somme d'une série de Fourier lacunaire quadratique

La fonction q définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi n^2 x}}{i\pi n^2}$$

est étudie par Riemann il y a environ 150 ans, avec l'idée que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable. L'étude est poursuivie par Hardy qui prouve en 1916 que cette fonction est non dérivable en tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbb{Q}\}$. Il reste à étudier la dérivabilité en x rationnel et c'est Gerver qui en 1970 réussit à trouver le résultat assez inattendu : la fonction est dérivable en tout $x \in \mathbb{Q}$. Depuis, d'autres propriétés de cette fonction ont été étudiées, propriétés qui analysent plus finement la régularité de cette fonction : en particulier son ordre de Holder local et son spectre multifractal.
Le sujet a pour objet d'établir la dérivabilité de la fonction q au point 1 ; il utilise des outils de l'analyse complexe.
Le problème est composé de cinq parties ; les deux premières parties ont pour objectif d'établir la formule (2) qui sera utile dans la cinquième partie. Les trois dernières parties du problème s'enchaînent entre elles.

$1^{\text{ère}}$ partie
Formule sommatoire de Poisson

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que les applications $t \longmapsto t^2 g(t)$ et $t \longmapsto t^2 g'(t)$, définies sur $\mathbb{R}$, soient bornées à l'infini, ce qui revient à dire que

$$g(t) \underset{t\to\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ et } g'(t) \underset{t\to\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

On lui associe la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par

$$g_0(t) = g(t), \quad g_n(t) = g(t+2n\pi) + g(t-2n\pi) \quad t \in \mathbb{R}, \;\; n \in \mathbb{N}^*$$

1. Montrer que pour tout réel x, la fonction $t \longmapsto g(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   Par définition, la transformée de Fourier de g est la fonction notée $\widehat{g}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt}dt, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} g_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

3. On note $\widetilde{g}$ la fonction définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $\widetilde{g}(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(t)$.

   (a) Montrer que la fonction $\widetilde{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Justifier que la fonction $\widetilde{g}$ est 2π-périodique et que ses coefficients de Fourier complexes sont donnés par

   $$c_k(\widetilde{g}) = \frac{1}{2\pi}\widehat{g}(k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

   On remarquera que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{g}(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{p=-n}^{p=n} g(t + 2p\pi)$.

   (c) Montrer que les familles $(g(2n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\widehat{g}(n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables et que leurs sommes vérifient la relation suivante, dite formule sommatoire de Poisson,

   $$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(2n\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n).$$

$2^{\text{ème}}$ partie
Application de la formule sommatoire de Poisson

Pour tout réel $\alpha > 0$, on note h_α la fonction définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $h_\alpha(t) = e^{-\alpha^2 t^2}$.

1. Vérifier que, pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction h_α satisfait les hypothèses faites sur la fonction g dans la partie précédente.
   Dans la suite, on notera $\widehat{h_\alpha}$ *la transformée de Fourier de* h_α, $\alpha > 0$ *; on admettra que* $\widehat{h_1}(0) = \sqrt{\pi}$.

2. Montrer que la fonction $\widehat{h_1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle satisfait l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{2}y \;=\; 0 \qquad (1)$$

3. Résoudre l'équation différentielle (1) et donner l'expression de $\widehat{h_1}$.

4. Montrer, pour tout $\alpha >$ et tout réel x, $\widehat{h_\alpha}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{\frac{-x^2}{4\alpha^2}}$.

5. Montrer, pour tout réel $a > 0$, la relation

$$\sqrt{a} \quad 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 a}\Bigg) \;=\; 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-\pi n^2}{a}}. \qquad (2)$$

$3^{\text{ème}}$ partie
Un résultat général sur les fonctions holomorphes

Si a et b sont des nombres complexes, $\gamma_{a,b}$ désigne le chemin du plan complexe $\mathbb{C}$ défini, pour tout $t \in [0,1]$, par $\gamma_{a,b}(t) = (1-t)a + tb$; son image $\gamma_{a,b}[0,1]) = \{(1-t)a + tb, \;\; 0 \leq t \leq 1\}$ est notée $[a, b]$; c'est le segment du complexe d'extrémités a et b.
Pour la suite du problème, on notera Ω la partie de $\mathbb{C}$ définie par

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \;\; \text{Im}(z) > 0\}$$

1. Vérifier que pour tout $(a, b) \in \Omega^2$, $[a, b] \subset \Omega$, puis justifier que Ω est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$.
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue, si $(a, b) \in \Omega^2$, on définit l'intégarle curviligne de f le long du chemin $\gamma_{a,b}$, notée $\int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz$ ou simplement $\Phi(a, b)$, par
$$\Phi(a, b) = \int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz := (b - a)\int_0^1 f((1 - t)a + tb)dt.$$
2. Soit a fixé dans Ω ; montrer que l'application $\Phi_a : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $b \longmapsto \Phi_a(b) = \Phi(a, b)$, est continue sur Ω.
3. Soit ψ la fonction définie, pour tout $z \in \Omega$, par $\psi(z) = \overline{z}$; soient a et b deux éléments distincts de Ω. Montrer que l'ensemble des $c \in \Omega$ tels que
$$\int_{\gamma_{a,c}} \psi(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} \psi(z)dz = \int_{\gamma_{a,b}} \psi(z)dz$$
est soit une droite soit une demi-droite du plan complexe à préciser.
4. Dans la suite de cette partie, f est supposée holomorphe sur Ω. Si x et y sont des réels tels que $x + iy \in \Omega$, on pose
$$P(x, y) = \text{Re}(f(x + iy)), \quad Q(x, y) = \text{Im}(f(x + iy)).$$
   (a) Rappeler les relations reliant les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ puis $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$.
   (b) Soit $(a, b, c) \in \Omega^3$. Montrer à l'aide des résultats du programme sur les formes différentielles que $\int_{\partial T^+} Pdx - Qdy = \int_{\partial T^+} Qdx + Pdy$, où ∂T^+ désigne la frontière, orientée dans le sens direct, de la plaque triangulaire T du plan $\mathbb{R}^2$ dont les sommets sont les affixes des complexes a, b et c. En déduire $\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} f(z)dz = \int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz$.
   (c) Soit $a \in \Omega$ fixé ; déduire de ce qui précède que la fonction Φ_a est holomorphe sur Ω et que sa dérivée au sens complexe, noté Φ'_a, vérifie $\Phi'_a(b) = f(b)$ pour tout $b \in \Omega$; on rappelle que
$$\Phi'_a(b) = \lim_{\substack{c \to b \\ c \in \Omega\setminus\{b\}}} \frac{\Phi_a(c) - \Phi_a(b)}{c - b}$$
   (d) On suppose que, pour tout $b \in \Omega$, la fonction $r \longmapsto \Phi(ir, b)$, définie sur $]0, +\infty[$, admet une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque r tend vers 0^+ ; on note $F(b)$ cette limite. Montrer que, pour tout $(b, c) \in \Omega^2$, $F(c) - F(b) = \Phi(b, c)$, puis en déduire que F est holomorphe sur Ω et que $F' = f$ sur Ω.

$4^{\text{ème}}$ partie
Étude d'un exemple

On note $\exp$ la fonction exponentielle complexe. Si $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$, on note $Arg(z)$ l'élément de l'intervalle $]-\pi, \pi[$ tel que $z = |z|\exp(iArg(z))$; on pose alors $\text{Log}(z) = \ln(|z|) + iArg(z)$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$z^\lambda = \exp(\lambda \text{Log}(z))$$

La fonction Log est le logarithme principal défini sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$; on rappelle que les fonctions $\exp$ et Log sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}\backslash R^-$ respectivement ; leur dérivées au sens complexes vérifiant

$$\text{Log}'(z) = \frac{1}{z}, \ \ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^- \quad \text{et} \quad \exp'(z) = \exp(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Soit λ un réel fixé dans l'intervalle $]-1, 0[$; on note f_λ la fonction définie, pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, par

$$f_\lambda(z) = z^\lambda \exp(-\frac{i}{z}).$$

1. Justifier que f_λ est holomorphe sur Ω.
2. Soit b un complexe fixé dans Ω. On note $J_{\lambda,b}$ la fonction, définie pour tout $r > 0$, par $J_{\lambda,b}(r) = \int_{\gamma_{ir,b}} f_\lambda(z)dz$. Montrer que la fonction $J_{\lambda,b}$ admet une limite, notée $F_{\lambda,b}$, lorsque r tend vers 0^+ et que
$$F_\lambda(b) = b^{\lambda+1} \int_{]0,1]} t^\lambda \exp(-i\ tb)dt.$$
On pourra utiliser le théorème de convergence dominée après en avoir vérifié les conditions de validité.
3. On note G_λ la fonction, définie pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $G_\lambda(z) = z^{-\lambda-2} \exp\left(\frac{i}{z}\right) F_\lambda(z)$.
   (a) Justifier que les fonctions F_λ et G_λ sont holomorphes sur Ω et que $F'_\lambda = f_\lambda$ sur Ω.
   (b) Montrer que, pour tout $z \in \Omega$, $G_\lambda(z) = \dfrac{1}{z} \exp\left(\dfrac{i}{z}\right) \displaystyle\int_1^{+\infty} u^{-\lambda-2} \exp\left(-\frac{iu}{z}\right) du.$
   (c) Montrer que, pour tout $z \in \Omega$, $|G_\lambda(z)| \leq 2$ et que $|F_{-1/2}(z)| \leq 2|z|^{\frac{3}{2}}$.

$5^{\text{ème}}$ partie
Démonstration de la propriété proposée

Pour tout entier naturel non nul n, on note u_n la fonction définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par

$$u_n(z) = \exp(i\pi n^2 z).$$

1. Soit $z \in \mathbb{C}$; montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(z)$ converge si et seulement si $z \in \Omega$.
Dans la suite, on pose $u(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, $z \in \Omega$.
2. Montrer que, pour tout $z \in \Omega$, $u(z+1) + u(z) = 2u(4z)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$, on pose
$$\widetilde{u}_n(x, y) = u_n(x + iy) \ \ \text{et} \ \ \widetilde{u}(x, y) = u(x + iy)$$
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} n^k \widetilde{u}_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
   (b) Montrer soigneusement que la fonction $\widetilde{u}$, définie ci-dessus, possède en tout point de $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x et exprimer $\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}(x, y)$, pour $(x, y) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$, sous la forme de la somme d'une série.

(c) Montrer de même que la fonction $\widetilde{u}$ possède en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à y et l'exprimer en fonction de $\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}(x,y)$.

(d) Montrer que la fonction u est holomorphe sur Ω.

4. Partant de la formule (2) de la deuxième partie et moyennant un résultat sur les zéros d'une fonction holomorphe, montrer que pour tout $z\in\Omega$,

$$\left(\frac{i}{z}\right)^{1/2}(1+2u(z)) = 1+2u\left(-\frac{1}{z}\right).$$

5. En déduire que, pour tout $z\in\Omega$, $u(1+z)+\dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{i}{z}\right)^{1/2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\exp(\frac{-i\pi n^2}{4z}) - \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{z}\right)\right)$.

6. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{u_n}{i\pi n^2}$ converge normalement sur $\{z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z)\geq 0\}$ et que sa somme, notée v, est continue sur cette ensemble.

7. Montrer que, pour tout $z\in\Omega$ et tout $\alpha>0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nF_{-1/2}\left(\frac{\alpha z}{\pi n^2}\right)$ est convergente, où $F_{-1/2}$ est la fonction définie dans la quatrième partie.

8. Pour tout $z\in\Omega$, on pose

$$v_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(z)}{i\pi n^2} \quad et \quad w(z) = \frac{(i\pi)^{1/2}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(nF_{-1/2}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - 2nF_{-1/2}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right)\right).$$

(a) Montrer que la fonction v_1 est holomorphe sur Ω et que $v_1' = u$.

(b) On admet que la fonction w est holomorphe sur Ω ; calculer sa dérivée w', au sens complexe, en admettant que l'on puisse dériver terme à terme la série définissant w.

(c) Montrer que, pour tout $z\in\Omega$,

$$v_1(z+1) - v(1) = \frac{-z}{2} + \frac{(i\pi)^{1/2}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(nF_{-1/2}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - 2nF_{-1/2}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right)\right).$$

9. Montrer qu'il existe une constante c positive telle que, pour tout $z\in\Omega$, on ait

$$\left|v(z+1) - v(1) + \frac{z}{2}\right| \leq c|z|^{3/2}.$$

10. Montrer soigneusement que $q(x+1) - q(1) + \frac{x}{2} \underset{x\to 0}{=} O(x^{3/2})$. En déduire que la fonction q est dérivable en 1 et préciser $q'(1)$.

FIN DE L'ÉPREUVE